(مقالهٔ پژوهشی)

روش پرتابی بهبودیافته برای حل دسته‌ای از مسائل کنترل بهینهٔ سوییچ‌دار*

فریبا وحیدی‌فر[۱]   محمدعلی مهرپویا[۲]

چکیده *امروزه کنترل بهینه کاربردهای وسیعی در علوم مختلف پیدا کرده است. دراین‌بین، دسته‌ای از مسائل کنترل بهینه تحت عنوان مسائل کنترل بهینهٔ سوییچ‌دار، ظهور پیدا نموده‌اند که در آنها تابع کنترل، شامل یک پرش ناپیوسته از یک مقدار اکسترمم به مقدار اکسترمم بعدی است و به‌طور خطی در تابع هدف و معادلات دینامیکی ظاهر می‌گردد. این مسائل در عمل بسیار دیده‌شده و به‌طور ویژه دارای کاربردهای فراوانی در مهندسی هوافضا، جرثقیل‌ها و ربات‌های صنعتی هستند. آنچه در حل این دسته از مسائل کنترل بهینه حائز اهمّیت است، پیدا کردن نقاط سوییچ با دقّت بالا است. در این مقاله، یک روش پرتابی بهبودیافته جهت حل کارای این دسته از مسائل کنترل بهینه ارائه می‌گردد. به این منظور، ابتدا روش پرتابی مرسوم برای حل عددی این مسائل بازگو و نقاط ضعف آن در یافتن نقاط سوییچ گوشزد می‌شود. سپس با بازطراحی روش با استفاده از تابع کنترل پارامتری شده، مسئله را به یافتن جواب معادله پرتابی طوری هدایت می‌کنیم که در آن، نقاط سوییچ و مقادیر اولّیه متغیرهای الحاقی، پارامترهای مجهول مسئله باشند. بدین ترتیب، نقاط سوییچ و طبعاً جواب مسئله کنترل بهینهٔ سوییچ‌دار، با دقّت بالایی به دست خواهد آمد. برای نشان دادن دقّت روش پیشنهادی، نتایج روش روی پنج مسئله معیارسنج گزارش گردیده و کارایی روش نشان داده خواهد شد.*

واژه‌های کلیدی کنترل بهینهٔ سوییچ‌دار؛ اصل مینیمم پونتریاگین؛ روش پرتابی؛ کنترل پارامتری شده.

An Improved Shooting Method for a Class of Switching Optimal Control Problems

F. Vahidifar   M.A. Mehrpouya

Abstract *Optimal control appears in some of the well-known areas of science in recent decades. In optimal control field, a classical subject is the switching optimal control problems which arise in some well-known application areas, such as aerospace engineering, cranes and industrial robots. In these problems, the input control jumps from one boundary to another and appears linearly in the objective function and the dynamical equations. What's important in solving these problems, is finding the switching points with high accuracy. In this paper, an improved shooting method for solving these problems is investigated. For this purpose, the well-known indirect shooting method for numerical solution of this class of optimal control problems is first reviewed and it's deficiency in obtaining the switching points accurately, is expressed. Then, with redesigning the method by applying a control parameterization, we transform the problem to the solution of the shooting equation, in which, the values of the switching points and the initial values of the costate variables are unknown parameters. This leads the switching points are captured accurately and thereby accurate solution of the problem is obtained. Numerical results of five benchmark examples are presented and efficiency of the method is reported.*

Key Words Switching Optimal Control, Pontryagin's Minimum Principle, Shooting Method, Control Parameterization

*تاریخ دریافت مقاله ۹۷/۱۰/٦ و تاریخ پذیرش آن ۹۹/۱/۲۹ می‌باشد. **DOI:** 10.22067/fum-mech.v31i1.77967

(۱) کارشناسی ارشد، ریاضی کاربردی، دانشگاه تفرش

(۲) نویسندهٔ مسئول: استادیار، دانشکدهٔ ریاضی، دانشگاه تفرش. mehrpouya@tafreshu.ac.ir

مقدّمه

مسائل کنترل بهینه امروزه نقش به‌سزایی در توسعه و پیشرفت فناوری‌های جدید یافته‌اند. در واقع هر یک از جنبه‌های فعّالیت روزمره ما عملاً نوعی سیستم کنترلی است. به‌عنوان نمونه، کنترل‌کننده‌های خودکار در سیستم‌های تهویه‌ای، دما و رطوبت هوای ساختمان‌ها را در حد مطلوب نگه می‌دارند. ترموستات و تایمر به ترتیب دیگ‌های حرارتی و ماشین‌های لباس‌شویی را کنترل می‌کنند. یک رانندهٔ اتومبیل، مسیر حرکتی را با پدال‌های پایی و فرمان اتومبیل کنترل می‌نماید. قوانینی که رفتار همه این سیستم‌ها به کمک آن تعیین می‌شود، باید شامل متغیرهایی باشند که مقادیرشان بتوانند به‌وسیلهٔ کسی خارج و مستقل از خود دستگاه تغییر داده شوند؛ بنابراین متغیرهایی تحت عنوان متغیرهای حالت یا متغیرهای مکانی داریم که دقیقاً مشخص می‌کنند دستگاه در زمان چه کاری را باید انجام دهد. در عوض متغیرهایی نیز داریم که متغیرهای کنترلی نامیده شده و می‌توانند برای اصلاح نتایج حاصل‌شده از رفتار دستگاه مورد استفاده قرار بگیرند. اکنون سیستم دینامیکی را در نظر بگیرید که رفتار آن به‌وسیلهٔ مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی توصیف می‌شود. سیستم در یک‌لحظه در موضعی خاص است و می‌خواهیم آن را طوری کنترل کنیم تا به موضع داده شده دیگری برسد. اگر این کار به طرق مختلفی قابل انجام باشد، آنگاه این حق وجود دارد که هر یک از آنها انتخاب شوند. بعضی از این انتخاب‌ها به‌منزلهٔ این است که سیستم زمان خیلی زیادی را تا رسیدن به موضع داده شده هدر می‌دهد. بقیه ممکن است در انرژی مصرفی پرهزینه باشند؛ بنابراین، به اندازه‌گیری هزینه متحمل شده در انتقال نیاز است. یک روش طبیعی برای اندازه‌گیری این هزینه، طرح انتگرالی است که بر حسب متغیرهای مکانی و متغیرهای کنترلی باشد و این همان تابع هدف مسئله کنترل بهینه است. لازم به یادآوری است که در بین مسائل کنترل بهینه، دسته‌ای خاص از مسائل تحت عنوان مسائل کنترل بهینهٔ سوییچ‌دار وجود دارد که ماهیّت آنها به‌گونه‌ای است که تابع کنترل هم در تابع هدف و هم در سیستم دینامیکی به‌صورت خطی ظاهر شده و مقادیر خود را از یک مجموعه گسسته می‌گیرد. حل این مسائل علی‌رغم ساختار ساده‌شان، با مشکلات عدیده‌ای همراه است. منشأ این مشکلات در ناپیوستگی و ناهمواری توابع کنترل نهفته است. در این مسائل، علاوه بر زمان‌های سوییچ، به مقادیر کنترل نیز در بین این زمان‌ها نیاز است. لذا، اگر ساختار کنترل بهینه و تعداد نقاط سوییچ از پیش معلوم نباشند، آنگاه حل این‌گونه مسائل بسیار دشوار خواهد بود. برای یافتن کنترل بهینه در این دسته از مسائل، از اصلی به نام اصل مینیمم پونتریاگین استفاده می‌شود که بنا بر آن، کنترل بهینه حتماً می‌بایست تابع همیلتونی را نسبت به توابع کنترل مینیمم نماید. بدین ترتیب، متغیرهایی تحت عنوان متغیرهای الحاقی به کار گرفته می‌شوند که به کمک آنها معادلات دینامیکی مسئلهٔ کنترل بهینه به تابع هدف الحاق شده تا در تشکیل تابع همیلتونی در استخراج شرایط لازم بهینگی برای حل مسئله مورد استفاده قرار گیرند. این متغیرهای الحاقی، صرفاً، چنین نقشی را داشته و دارای تعبیر فیزیکی خاصی نیستند.

کاربرد این نوع از مسائل کنترل بهینه را در بسیاری از سیستم‌ها از قبیل سیستم‌های بیولوژیک [1]، طراحی سیستم قدرت هایبریدی [2]، شبکه‌های بی‌سیم [3]، مهندسی هوافضا و ربات‌های صنعتی می‌توان مشاهده نمود. به‌عنوان‌مثال، در ربات‌های صنعتی سیستم‌های دینامیکی کنترل‌شده دارای طیف گسترده‌ای از حرکات ممکن هستند. با استفاده از روش‌های کنترل بهینه به نظر طبیعی می‌رسد که یک حرکت مشخص از رباتی را برای یک وظیفه معلوم در نظر بگیریم. رایج‌ترین معیارهای عملکرد ربات‌ها، بهره‌وری، دقّت در تعیین موقعیت دسته (چنگک) یا گرفتن وسیله‌ای با چنگک و مصرف انرژی آنهاست. انتخاب معیار برای بهینه‌سازی

به اهداف تکنولوژیکی یک ربات بستگی دارد. برای مثال، اگر عملیات انجام‌شده توسط ربات در آغاز گام بعدی برخی فرایندهای تولید با تأخیر مواجه شود (تجهیزات تکنولوژیکی برای ربات"منتظر بماند")، آنگاه وجود برنامه‌های کنترل زمان بهینه ضروری می‌شود. به‌عبارت‌دیگر، اگر یک ربات بتواند عملیاتش را سریع‌تر از آنچه برای گام بعدی پروسه تکنولوژیکی لازم است انجام دهد، آنگاه طبیعی است که عملیات رباتیک در یک زمان معیّن با کمترین هزینه انرژی انجام شود.

به دلیل مشکلاتی که در یافتن نقاط سوییچ و جواب بهینه وجود دارد، محاسبات کنترل‌های بهینه در این نوع از مسائل به‌طور ویژه‌ای مورد توجّه قرار گرفته است؛ بنابراین، روش‌های عددی مستقیم و غیرمستقیم که در آن اولی بر اساس گسسته‌سازی و برنامه‌ریزی غیرخطی و دومی متناظر با استفاده از اصل مینیمم پونتریاگین است، به‌طور گسترده‌ای در بسیاری از مسائل کنترل بهینه ازجمله کنترل‌های سوییچ‌دار مورد استفاده قرار گرفته‌اند. روش‌های مستقیم به دلیل قابلیّت‌ها و امکاناتشان مشهور هستند. این روش‌ها به حدس اوّلیّه برای متغیرهای الحاقی و استخراج شرایط لازم بهینگی نیاز ندارند. به همین دلیل انواع الگوریتم‌های مستقیم برای مسائل کنترل بهینهٔ سوییچ‌دار گزارش شده است. به‌عنوان‌مثال کایا و نوایکس [4]، روش محاسبات زمان سوییچ را توسعه دادند. این روش، روشی برای کنترل تک متغیره است که یک ترکیب کمان‌های ثابت ورودی شدنی اما نه لزوماً بهینه را از یک نقطه اوّلیّه به سمت نقطه هدف برای تعداد سوییچ‌های معلوم پیدا می‌کند. نویسندگان [4]، الگوریتم سوییچ‌های بهینه را در [5]، برای کنترل سوییچ‌های بهینه دستگاه‌های غیرخطی با یک کنترل تک متغیره توسعه دادند. در [6] مشابه با [4, 5]، طول کمان‌ها به‌عنوان متغیرهای بهینه‌سازی استفاده شده اما روش آنها برای کلاس عمومی‌تری از مسائل کنترل بهینهٔ سوییچ‌دار به کار رفته است که علاوه بر این، شرایط کافی مرتبه دوم بهینگی برای تضمین اینکه قانون کنترل بهینه باشد، استفاده گردیده است. لین و همکاران [7]، روش محاسباتی که بر پایهٔ تقریب تکّه‌ای ثابت کنترل است را به کار بردند. این طرح تقریبی دقیق است، اما مسئله را به سمت یک برنامه‌ریزی غیرخطی تقریبی هدایت می‌کند که حل عددی آن بسیار دشوار است. نویسندگان [7] تکنیکی جدید برای حل مشکلات این روش، با معرفی یک روش جدید برای تبدیل مسئلهٔ تقریبی به یک مسئلهٔ بهینه‌سازی جدید که حل آن آسان‌تر است، در [8] ارائه دادند. در [9] روش شبه‌طیفی اصلاح‌شده ارائه شده است. این روش، جواب دقیق مسائل کنترل بهینهٔ سوییچ‌دار را ارائه می‌دهد و می‌تواند نقاط سوییچ را با دقّت به دست آورد. علاقه‌مندان برای مطالعهٔ بیشتر به حل مستقیم این دسته از مسائل کنترل بهینه می‌توانند به مراجع [10-16] مراجعه نمایند.

از طرف دیگر، روش‌های غیرمستقیم، متناظر با استفاده از اصل مینیمم پونتریاگین هستند [17] و منجر به حل یک مسئلهٔ مقدار مرزی همیلتونی می‌شوند. مزایای اصلی این روش‌ها، دقّت بالای آنها در جواب و تضمین اینکه جواب به‌دست‌آمده در شرایط لازم بهینگی صدق می‌کند، است [18].

هدف این مقاله ارائه یک روش پرتابی غیرمستقیم برای حل دسته‌ای از مسائل کنترل بهینهٔ سوییچ‌دار است. به دلیل ناپیوستگی کنترل‌ها، روش پرتابی مرسوم در حل آنها، باعث خراب شدن دقّت روش، مخصوصاً در یافتن نقاط سوییچ می‌شود. در نتیجه برای رفع این مشکل، یک روش پرتابی بهبودیافته با کنترل پارامتری شده ارائه می‌گردد. به همین منظور، ابتدا، بر اساس اصل مینیمم پونتریاگین، شرایط لازم بهینگی که منجر به تشکیل یک مسئله مقدار مرزی همیلتونی (HBVP) می‌شود، استخراج شده، سپس با معلوم بودن تعداد نقاط سوییچ و ساختار کنترل بهینهٔ به‌دست‌آمده از

روش پرتابی مرسوم، توابع کنترل با توابع تکه‌ای ثابت جایگزین می‌شود. لذا، حل مسئله به حل معادله پرتابی تبدیل شده [19]، که در آن مقادیر نقاط سوییچ و مقادیر اوّلیّه متغیرهای الحاقی، پارامترهای مجهول هستند.

این مقاله در چند بخش طراحی شده است: بخش بیان مسئله، به فرموله کردن مسئله هدف، معرفی اصل مینیمم پونتریاگین و روش پرتابی اختصاص دارد. در بخش معرفی روش، روش پرتابی بهبودیافته با کنترل پارامتری‌شده ارائه می‌گردد. در بخش مثال‌های عددی، روش پیشنهادی بر روی پنج مسئله کنترل بهینه معیارسنج پیاده‌سازی شده و مزایای روش نشان داده خواهد شد.

بیان مسئله، اصل مینیمم و روش پرتابی

بیان مسئله اصلی. مسائل کنترل بهینهٔ سوییچ‌دار که در آن کنترل‌ها به‌صورت خطی ظاهر می‌شوند را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $\mathbf{x}(t)=\left[x_1(t),\ x_2(t),\dots,x_p(t)\right]^T$ بردار حالت و $\mathrm{u}(t)=\left[u_1(t),\ u_2(t),\dots,u_q(t)\right]^T$ بردار کنترل در بازهٔ $t\in\left[0,t_f\right]$ با زمان انتهایی آزاد t_f باشند که تابعی

$$J=\int_0^{t_f}1dt=t_f \tag{۱}$$

را نسبت به محدودیت‌های

$$\begin{aligned}\dot{\mathrm{x}}(t)&=\mathrm{h}(\mathrm{x}(t),\mathrm{u}(t),t)\\&=f_1(\mathrm{x}(t),t)+f_2(\mathrm{x}(t),t)\mathrm{u}(t)\end{aligned} \tag{۲}$$

$$\mathrm{x}(0)=\mathrm{x}_0 \tag{۳}$$

$$\mathrm{x}(t_f)=\mathrm{x}_f \tag{٤}$$

$$u_j(t)\in\{-1,+1\},\quad j=1,2,\dots,q \tag{٥}$$

در بازهٔ $\left[0,t_f\right]$ مینیمم می‌کند.

در اینجا بردار حالت x پیوسته است و کنترل‌ها دارای تعداد متناهی نقاط سوییچ می‌باشند که در این نقاط از یک مقدار به مقدار دیگر سوییچ می‌کنند. همچنین فرض شده که تابع $\mathrm{h}:\mathbb{R}^{p+q+1}\to\mathbb{R}^p$ تابعی هموار از متغیرهای $(\mathrm{x},\mathrm{u},t)$ باشد.

اصل مینیمم و روش پرتابی. به‌منظور فرموله کردن شرایط لازم بهینگی، تابع همیلتونی به‌صورت:

$$\begin{aligned}H(\mathrm{x}(t),\lambda(t),\mathrm{u}(t))&=1+\lambda^T(t)\mathrm{h}(\mathrm{x}(t),\mathrm{u}(t),t)\\&=1+\lambda(t)f_1(\mathrm{x}(t),t)+\lambda(t)f_2(\mathrm{x}(t),t)\mathrm{u}(t)\end{aligned} \tag{٦}$$

معرفی شده که $\lambda(t)=\left[\lambda_1(t),\ \lambda_2(t),\dots,\lambda_p(t)\right]^T$ متغیر الحاقی نامیده می‌شود. همچنین ضریب تابع کنترل $\mathrm{u(t)}$ در تابع همیلتونی، تابع سوییچ نامیده شده و با

$$\begin{aligned}\sigma(\mathrm{x},\lambda,t)&=\left[\sigma_1(\mathrm{x},\lambda,t),\dots,\sigma_q(\mathrm{x},\lambda,t)\right]\\&=\lambda^T f_2(\mathrm{x},t)\end{aligned} \tag{۷}$$

نشان داده می‌شود.

توجّه شود که جواب مسئله کنترل بهینه در شرایط لازم،

$$\dot{\mathrm{x}}=\left[\partial H/\partial\lambda\right]^T, \tag{۸}$$

$$\dot{\lambda}=-\left[\partial H/\partial\mathrm{x}\right]^T, \tag{۹}$$

صدق می‌کند و بر اساس اصل مینیمم پونتریاگین، کنترل بهینه بایستی تابع همیلتونی را نسبت به توابع کنترل مینیمم کند [17] که به‌سادگی قانون کنترل

$$u_j(t)=\begin{cases}-1 & \text{if}\quad \sigma_j(x(t),\lambda,t)>0\\+1 & \text{if}\quad \sigma_j(x(t),\lambda,t)<0\\\text{undefined} & \text{if}\quad \sigma_j(x(t),\lambda,t)=0\end{cases} \tag{۱۰}$$

برای $j=1,2,...,q$ نتیجه می‌شود.

بنابراین تابع سوییچ $\sigma(t)$ تابع کنترل را با

$$\mathrm{u}(t)=-\mathrm{sign}(\sigma(t)), \tag{۱۱}$$

روی بـازهٔ $\left[0,t_f\right]$ بـه‌جـز بـر روی نقـاط سـوییچ مشخص می‌کند. توجّه شود وقتی زمان نهـایی t_f آزاد است، شرط ترانسورسالیتی

$$H(x(t_f),\lambda(t_f),\mathrm{u}(t_f))=0 \tag{۱۲}$$

بایستی در کنار شرایط اوّلیّه و مـرزی، یعنـی معـادلات (۳ و ٤) قرار بگیرد [17]. حال با جایگذاری تابع کنترل (۱۱) در معادلات (۸، ۹ و ۱۲) و در نظر گرفتن شرایط (۳ و ٤) یک HBVP به‌عنوان شـرایط لازم بهینگـی بـه دست می‌آید. این HBVP را به‌صورت:

$$\begin{cases}\dot{\mathrm{y}}=f(t,\mathrm{y}) & 0\le t\le t_f\\ \mathrm{y}(0)=\mathrm{y}_0\\ \Psi(\mathrm{y}(\mathrm{t}_f),t_f)=0\end{cases} \tag{۱۳}$$

نشان می‌دهیم که $\mathrm{y}(t)=\left[\mathrm{x}(t),\lambda(t)\right]^T\in\mathbb{R}^{2p}$، $f:\mathbb{R}^{2p+1}\to\mathbb{R}^{2p}$ و $\Psi:\mathbb{R}^{2p+1}\to\mathbb{R}^{p+1}$ تـابع مرزی مسئله اسـت کـه مجمـوع شـرایط در معـادلات (٤ و ۱۲) را بیان مـی‌کنـد. بـه‌منظـور اسـتفاده از روش پرتابی برای حل HBVP (۱۳) ابتدا، مسئله مقدار اوّلیّـه متناظر آن را به‌صورت:

$$\begin{cases}\dot{\mathrm{y}}=f(t,\mathrm{y}) & 0\le t\le t_f\\ \mathrm{y}(0)=\mathrm{y}_0\end{cases} \tag{١٤}$$

در نظـــر مـــی‌گیـــریم. حـــال بـــردار $\mathrm{v}=(\lambda_1(0),...,\lambda_p(0),t_f)^T$ را به‌گونه‌ای می‌یـابیم که سیستم معادلات جبری غیرخطی

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(\mathrm{v})&=\Psi(\mathrm{y}(\mathrm{t}_f),t_f)\\ &=\begin{pmatrix}\mathrm{x}(t_f)-\mathrm{x}_f\\ H(\mathrm{x}(t_f),\lambda(t_f),-\mathrm{sign}(\sigma(t_f)))\end{pmatrix}\\ &=0\end{aligned} \tag{۱۵}$$

به‌عنوان معادلهٔ پرتابی، برقـرار باشـد. همچنـین فـرض می‌کنیم که *IVP* (١٤) دارای یک جواب منحصـربه‌فـرد باشد. باید توجّه داشت که به دلیل وجود تابع انتگرالده ناپیوسته در سمت راست سیستم معـادلات دیفرانسـیل در *IVP* (١٤)، حل معادله پرتابی (۱۵) سـبب از دسـت رفتن دقّت در جواب *HBVP* (۱۳) مخصوصاً در یـافتن نقاط سوییچ، می‌گردد [20]. بخش بعد به راه‌حل دقیـق و کارآمد این *HBVP* اختصاص داده شده است.

معرفی روش پرتابی بهبودیافته با کنترل پارامتری شده

در این بخش با دانستن تعداد نقـاط سـوییچ و سـاختار کنترل به‌دست‌آمده از روش پرتابی مرسوم که در بخش قبل توضیح داده شد، فرض مـی‌کنـیم هـر تـابع کنتـرل $u_j(t)$ دارای n_j نقطهٔ سوییچ باشد؛ بنـابراین تقریـب زیـر بـرای هـر کنتـرل $u_j(t)$، $j=1,...,q$ در نظـر گرفته خواهد شد:

$$u_j(t)=\begin{cases}b_j^0, & s_j^0\le t\le s_j^1\\ b_j^1, & s_j^1<t\le s_j^2\\ \vdots & \\ b_j^{n_j}, & s_j^{n_j}<t\le s_j^{n_j+1}\end{cases} \tag{١٦}$$

که $0=s_j^0<s_j^1<...<s_j^{n_j}<s_j^{n_j+1}=t_f$ به‌عنوان نقـاط سـوییچ و انتهـایی در نظـر گرفتـه شـده‌انـد کـه روی هر زیردامنـه، پـارامتر معلـوم b_j^k بـرای $u_j(t)$ را اختیـــار مـــی‌کنـــد. طبـــق (۵)، $k=0,1,...,n_j$

$b_j^k \in \{-1,+1\}$ کـه $b_j^{k+1}=-b_j^k$ اسـت؛ بنـابراین طبق (۱۰) داریم:

$$b_j^k = -\text{sign}(\sigma_j(t)),\quad s_j^k < t \le s_j^{k+1} \tag{۱۷}$$

و $b_j^{n_j}=(-1)^{n_j} b_j^0$. ایـن سـاختار کنتـرل، شـرایط سوییچ

$$\sigma_j(s_j^i)=0,\quad i=1,\dots,n_j \tag{۱۸}$$

را نتیجه می‌دهد.

باید توجّه داشت، بر اساس این تقریب هر کنتـرل $u_j(t)$ را بـــا $s_j=(s_j^1,\dots,s_j^{n_j},t_f)$ پـــارامتری می‌کنیم. در نتیجه هـر تـابع کنتـرل $u_j(t)$ در معادلـه (۱٦) را می‌توانیم به‌صـورت $u_j(t;s_j)$ نشـان دهـیم. حال با جایگذاری تابع کنترل

$$\text{u}(t;s)=\left[u_1(t;s_1),\dots,u_q(t;s_q)\right]^T \tag{۱۹}$$

در معـــادلات (۸ و ۹)، یـــک سیســـتم از معـــادلات دیفرانسیل با $\text{u}(t;s)$ در سمت راست معادلـه کـه بـر اساس $\text{x}(t)$ و $\lambda(t)$ اسـت، بـه دسـت مـی‌آیـد. ایـن سیستم از معادلات دیفرانسیل در کنـار شـرایط اوّلیّـه و مرزی (۳ و ٤) و شرط ترانسورسـالیتی (۱۲) و شـرایط سوییچی (۱۸)، تشکیل یک HBVP به‌صورت:

$$\begin{cases}\dot{y}=\text{f}(t,\text{y},\text{u}(t;s)), & 0\le t\le t_f\\ \text{y}(0)=\text{y}_0\\ \Psi(\text{y}(t_f),s_1,\dots,s_q,t_f)=0\end{cases} \tag{۲۰}$$

را می‌دهد.

به‌منظور استفاده از روش پرتابی برای حل HBVP (۲۰)، معادلهٔ پرتابی به‌صورت:

$$\Psi(.)=\begin{pmatrix}\text{x}(t_f)-\text{x}_f\\ H(\text{x}(t_f),\lambda(t_f),-\text{sign}(\sigma(t_f)))\\ \sigma_j(s_j^1)\\ \vdots\\ \sigma_j(s_j^{n_j})\end{pmatrix},\quad j=1,2,\dots,q \tag{۲۱}$$

تشکیل می‌شود که به‌جای $\Psi(\text{y}(t_f),s_1,\dots,s_q,t_f)$ برای راحتی از $\Psi(.)$ اسـتفاده مـی‌کنـیم. هـدف، حـل معادله پرتابی

$$\text{S(z)}=\Psi(.)=0 \tag{۲۲}$$

است که درواقع بردار z، بردار پارامترهـای مجهـول و به‌صورت

$$\text{z}=(\text{s},\lambda_1(0),\dots,\lambda_p(0))^T \tag{۲۳}$$

در نظر گرفته شده است که در آن

$$s=(s_1,\dots,s_q) \tag{۲٤}$$

است. مجدداً یادآور می‌شویم کـه معادلـه پرتـابی (۲۲) سیستمی از معادلات غیرخطی برای یافتن z مـورد نظـر است کـه $\text{y}(t_f;\text{z})$ تقریبـی از $\text{y}(t_f)$ اسـت و بـرای محاسبه آن در یک z معلوم، نیـاز بـه حـل IVP زیـر داریم:

$$\begin{cases}\dot{\text{y}}=\text{f}(t,\text{y},\text{u}(t;s)), & 0\le t\le t_f\\ \text{y}(0)=\text{y}_0\end{cases} \tag{۲۵}$$

فرض کنیم، IVP (۲۵) یک جواب منحصـربه‌فـرد داشته باشد که آن را با $\text{y}(t;\text{z})$ نشان مـی‌دهـیم. بـرای یافتن جواب IVP (۲۵) با z معلوم، ابتدا بازه $\left[0,t_f\right]$ را به $(n_1+\dots+n_q)+1$ قسمت تقسیم می‌کنیم. سپس معادله دینامیکی بـا شـرط اوّلیّـه y_0 در زیربـازهٔ اوّل را حل می‌نماییم. مقدار مشاهده شده در انتهای هر زیربازه به‌عنوان شرط اوّلیّه معادلات دینامیکی در زیربازه بعدی در نظر گرفته می‌شود و این روند ادامه پیدا می‌کنـد تـا به زیربازه آخر برسیم. علاوه بر این، اگر هر شـرطی در

معادله پرتابی نقض شود، بایستی بردار جدید z محاسبه و روند فوق از سر گرفته شود تا زمانی که معادله پرتابی برقرار گردد.

توجّه شود IVP (۲۵) می‌تواند با یک حل‌کننده معادلات دیفرانسیل عادی با دقّتی از مرتبه بالا حل شود که خاصیت کنترل خطا دارد. در این مقاله، جدا از روش‌ها و نرم‌افزارهایی که برای حل IVP (۲۵) توسعه یافته‌اند، از تابع ode45 در نرم‌افزار متلب استفاده شده است. این تابع روندی بر اساس فرمول رانگ-کوتا صریح با گام زمانی متغیر برای کارایی محاسبات عددی معادلات دیفرانسیل دارد. علاوه بر این، تابع ode45 خطا را با استفاده از دو پارامتر RelTol و AbsTol کنترل می‌کند. با استفاده از این پارامترها می‌توانیم تلورانس خطای نسبی و مطلق را تنظیم کنیم. همچنین، تابع fsolve برای حل دستگاه معادلات غیرخطی (۲۲) استفاده شده است. توجّه شود در این حل‌کننده دقّت جواب مشاهده‌شده را می‌توانیم به کمک دو پارامتر TolFun و TolX تنظیم کنیم که پارامتر اوّل تلورانس روی مقدار تابع و پارامتر دوم تلورانس روی مقدار طول گام را تعیین می‌کند.

مثال‌های عددی

در این بخش پنج مثال برای نشان دادن کاربرد و دقّت روش بیان‌شده ارائه خواهد گردید.

مثال ۱: نوسانگر واندرپول. یک مدار نوسانگر واندرپول که با استفاده از دیود تونل ساخته می‌شود را به‌عنوان نوسانگر دیود تونل واندرپول می‌شناسند. دیود تونل‌ها به تولید سیگنال‌هایی با فرکانس بسیار بالا کمک شایانی می‌نمایند. اکنون فرض کنیم در یک مدار نوسانگر دیود تونل واندرپول، هدف مینیمم کردن زمان نهایی t_f نسبت به محدودیّت‌های

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{۲۶}$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - (x_1^2 - 1)x_2 + u \tag{۲۷}$$

$$u(t) \in \{-1, 1\} \tag{۲۸}$$

و شرایط اوّلیّه و مرزی

$$\mathrm{x}(0) = [1,1]^T \tag{۲۹}$$

$$\mathrm{x}(t_f) = [0,0]^T \tag{۳۰}$$

باشد [21]. در این مسئله، تابع کنترل u، ولتاژ این مدار الکتریکی در نظر گفته می‌شود. حال، تابع همیلتونی در (٦) به‌صورت:

$$H(\mathrm{x},\lambda,u) = [1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2(-x_1 - (x_1^2 - 1)x_2 + u)] \tag{۳۱}$$

تشکیل می‌شود.

بدین ترتیب، معادلات الحاقی (۹) به شکل

$$d\lambda_1 / dt = (2x_1x_2 + 1)\lambda_2 \tag{۳۲}$$

$$d\lambda_2 / dt = -\lambda_1 - \lambda_2(1 - x_1^2) \tag{۳۳}$$

به دست می‌آیند.

تابع سوییچ $\sigma(t) = \lambda_2(t)$ کنترل بهینه را با $u(t) = -\mathrm{sign}(\lambda_2(t))$ مشخص می‌کند. توجّه شود، با استفاده از روش پرتابی مرسوم روی این مسئله، جواب سیستم کنترل در نقطه سوییچ $s = 0.719087$ به‌دست‌آمده است. حال با معلوم بودن تعداد نقاط سوییچ و ساختار کنترل بهینه، این مسئله با روش پیشنهادی حل می‌شود؛ بنابراین، تابع پرتابی به‌صورت:

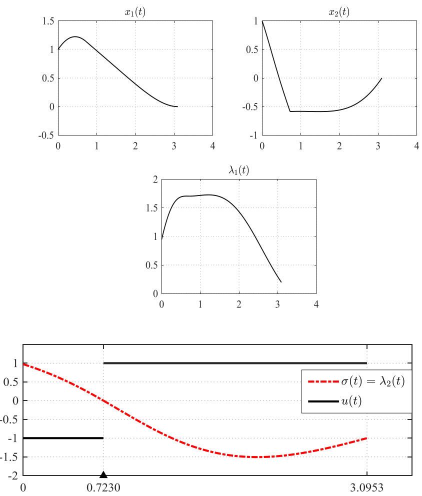
$$\Psi(.) = \begin{pmatrix} \mathrm{x}(t_f) \\ 1 + \lambda_2(t_f)u(t_f) \\ \lambda_2(s) \end{pmatrix} \tag{۳٤}$$

است که بردار مجهولات z به شکل

$$z=(s,t_f,\lambda_1(0),\lambda_2(0))^T \quad (۳۵)$$

در نظر گرفته شده‌اند.

در شکل (۱)، توابع سوییچ، کنترل، حالت و الحاقی نشان داده شده است. در جدول (۱)، مقادیر زمان‌های نهایی و سوییچ با جواب تقریبی کد BNDSCO پرتابی چندگانه در [22] مقایسه شده است. علاوه براین، برای نشان دادن دقّت و همگرایی روش، مقادیر اولّیه متغیرهای الحاقی در جدول (۲) گزارش شده‌اند.



شکل «۱»: توابع سوییچ، کنترل، حالت و الحاقی به‌دست‌آمده از روش پیشنهادی در مثال ۱

مثال ۲: سیستم غیرخطی مرتبه سوم. کنترل بهینهٔ سیستم‌های غیرخطی، امروزه یکی از دشوارترین و چالش‌زاترین موضوعات در نظریّه کنترل است. اکنون فرض کنیم با مسئلهٔ زمان انتهایی آزاد یک سیستم غیرخطی مرتبه سوم که در [5] آمده، روبرو هستیم. مسئله، مینیمم کردن زمان انتهایی t_f نسبت به محدودیّت‌های

$$\dot{x}_1=x_2 \quad (۳۶)$$

$$\dot{x}_2=x_3 \quad (۳۷)$$

$$\dot{x}_3=\sin(x_1)+u \quad (۳۸)$$

$$u(t)\in\{-1,1\} \quad (۳۹)$$

و شرایط اولّیه و مرزی

$$x(0)=[1,1,1]^T \quad (۴۰)$$

$$x(t_f)=[0,0,0]^T \quad (۴۱)$$

است.

در اینجا تابع همیلتونی (۶) به‌صورت:

$$H(x,\lambda,u)=[1+\lambda_1 x_2+\lambda_2 x_3+\lambda_3(\sin(x_1)+u)] \quad (۴۲)$$

تشکیل می‌شود. در نتیجه، معادلات الحاقی (۹) به‌صورت:

$$d\lambda_1/dt=-\lambda_3\cos(x_1) \quad (۴۳)$$

$$d\lambda_2/dt=-\lambda_1 \quad (۴۴)$$

$$d\lambda_3/dt=-\lambda_2 \quad (۴۵)$$

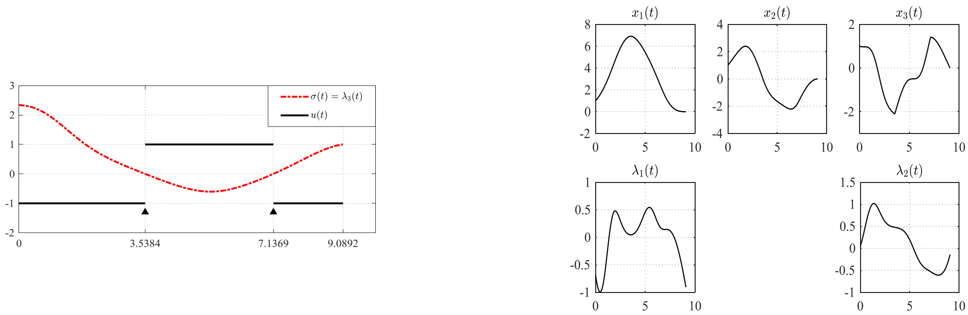
به دست می‌آیند.

جدول «۱»: (مسئلهٔ واندرپول): مقادیر زمان‌های نهایی و سوییچ محاسبه‌شده برای مقادیر مختلف پارامترهای fsolve و ode45

TolFun	TolX	RelTol	AbsTol	s	t_f
1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	0.72301562789	3.09527251197
1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	0.72300371861	3.09520238575
1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	0.72300374210	3.09520234037
1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	0.72300374213	3.09520234047
نتایج به‌دست‌آمده از[21]				0.72300373	3.09520234

جدول «۲»: (مسئلهٔ واندرپول): مقادیر محاسبه شده مقادیر اوّلیّه متغیرهای الحاقی به ازای مقادیر مختلف پارامترهای fsolve و ode45

TolFun	TolX	RelTol	AbsTol	$\lambda_1(0)$	$\lambda_2(0)$
1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	0.94734017185	0.97368164537
1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	0.94728445696	0.97364215977
1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	0.94728448864	0.97364224421
1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	0.94728448872	0.97364224436
نتایج به‌دست‌آمده از [21]				0.94728449	0.97364224



شکل «۲»: توابع سوییچ، کنترل، حالت و الحاقی به‌دست‌آمده از روش پیشنهادی در مثال ۲

جدول «۳»: (سیستم غیرخطی مرتبه سوم): مقادیر زمان‌های نهایی و سوییچ محاسبه‌شده برای مقادیر مختلف پارامترهای fsolve و ode45

TolFun	TolX	RelTol	AbsTol	s_1	s_2	t_f
1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	3.53834896131	7.13686556868	9.08924534920
1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	3.53835661840	7.13686397456	9.08924139329
1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	3.53835630091	7.13686367859	9.08924079250
1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	3.53835630094	7.13686367861	9.08924079213
نتایج به‌دست‌آمده از [5]				3.53835	7.13686	9.08924

جدول «٤»: (سیستم غیرخطی مرتبه سوم): مقادیر محاسبه‌شده مقادیر اوّلیّه متغیرهای الحاقی به ازای مقادیر مختلف پارامترهای fsolve و ode45

TolFun	TolX	RelTol	AbsTol	$\lambda_1(0)$	$\lambda_2(0)$	$\lambda_3(0)$
1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	-0.68007349291	0.05064547984	2.33692283359
1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	-0.68012157240	0.05060297981	2.33697211250
1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	-0.68012348175	0.05060181910	2.33697493063
1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	-0.68012348372	0.05060181876	2.33697493536

تابع سوییچ $\sigma(t)=\lambda_3(t)$ کنترل بهینه را با $u(t)=-\text{sign}\lambda_3(t)$ مشخص می‌کند. با استفاده از روش پرتابی مرسوم روی این مسئله، جواب سیستم کنترل در نقاط سوییچ $s_1=3.4887$، $s_2=7.0694$ و $t_f=9.892$ به‌دست‌آمده است. حال با معلوم بودن تعداد نقاط سوییچ و ساختار کنترل بهینه، این مسئله با روش پیشنهادی حل شده است. در شکل (۲)، توابع کنترل، سوییچ، حالت و الحاقی به‌دست‌آمده نشان داده شده است و در جدول (۳)، مقادیر زمان‌های نهایی و سوییچ گزارش شده‌اند. علاوه براین، برای نشان دادن دقّت و همگرایی روش، مقادیر اولیهٔ متغیرهای الحاقی در جدول (٤)، گزارش شده‌اند.

مثال ۳: بازوهای یک روبات. مسئله کنترل بهینه بازوهای یک روبات با دو لینک که توسط محققین مختلف به آن پرداخته شده است را در نظر بگیرید [23, 24, 6].

در این مسئله، هدف مینیمم کردن زمان انتهایی t_f نسبت به محدودیّت‌های

$$\dot{x}_1 = x_3 \qquad (٤٦)$$

$$\dot{x}_2 = x_4 \qquad (٤٧)$$

$$\dot{x}_3 = [(50/3)\sin(x_2)(x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2) + (10/3)(2u_1 - u_2) - 5u_2\cos(x_2) + (25/2)\sin(2x_2)x_3^2]/[(400/9) - 25\cos^2(x_2)] \qquad (٤٨)$$

$$\dot{x}_4 = [-(50/3)\sin(x_2)(5x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2) + (10/3)(5u_2 - 2u_1) + 10(u_2 - u_1)\cos(x_2) - (25/2)\sin(2x_2)(2x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2]/[(400/9) - 25\cos^2(x_2)] \qquad (٤٩)$$

$$u_j(t) \in \{-1,1\},\ j = 1,2 \qquad (٥٠)$$

با $\mathrm{x}(0) = [0,0,0,0,]^T$ و حالت نهایی $\mathrm{x}(t_f) = [-0.44, 1.83, 0, 0]^T$ است. لازم به ذکر است که در این مسئله، متغیرهای حالت x_1 و x_2 موقعیت زاویه‌ای نقطه اتصال و x_3 و x_4 نیز طبیعتاً سرعت‌های زاویه‌ای را بیان می‌نمایند. در ضمن، از گشتاورهای این دو لینک یعنی u_1 و u_2 به‌عنوان متغیرهای کنترلی به‌منظور هدایت روبات در کمترین زمان ممکن از موقعیت اوّلیّه به موقعیت پایانی، استفاده شده است.

بنابراین معادلات الحاقی (۹) به‌صورت:

$$d\lambda_1 / dt = 0 \qquad (٥١)$$

$$d\lambda_2 / dt = -(3/5)[\mathrm{M}(x_2, x_3, x_4, \lambda_3, \lambda_4, u_1, u_2)]/[256 - 288\cos^2(x_2) + 81\cos^4(x_2)] \qquad (٥٢)$$

$$d\lambda_3 / dt = [\lambda_1(16 - 9\cos^2(x_2)) + 12\sin(x_2) \times(\lambda_3(x_3 + x_4) - \lambda_4(5x_3 + x_4)) + \sin(2x+2) \times(9x_3(\lambda_3 - 2\lambda_4) - 9x_4\lambda_4)]/[-16 + 9\cos^2(x_2)] \qquad (٥٣)$$

$$d\lambda_4 / dt = [\lambda_2(16 - 9\cos^2(x_2)) + (x_3 + x_4) \times(12\lambda_3\sin(x_2) - 12\lambda_4\sin(x_2) - 9\lambda_4\sin(2x_2))]/[-16 + 9\cos^2(x_2)] \qquad (٥٤)$$

به دست می‌آیند که در آن

$$\begin{aligned} M(.) &= \cos^3(x_2)(180\lambda_3x_3x_4 + 90\lambda_3x_3^2 + 90\lambda_3x_4^2 \\ &-90\lambda_4x_4^2 - 450\lambda_4x_3^2 - 180\lambda_4x_3x_4) + \cos^2(x_2) \\ &\times(-690\lambda_4x_3^2 - 345\lambda_4x_4^2 + 345\lambda_3x_3^2 - 690\lambda_4x_3x_4) \\ &+27\sin(x_2)\cos^2(x_2)(\lambda_3u_2 - 2\lambda_4u_2 + 2\lambda_4u_1) \\ &+\cos(x_2)(-20\lambda_3x_3^2 - 20\lambda_3x_4^2 + 20\lambda_4x_4^2 \\ &+100\lambda_4x_3^2 - 40\lambda_3x_3x_4 + 40\lambda_4x_3x_4) + \sin(x_2) \\ &(48\lambda_3u_2 - 96\lambda_4u_2 + 96\lambda_4u_1 + \sin(2x_2)(-36\lambda_3u_1 \\ &+18\lambda_3u_2 - 90\lambda_4u_2 + 36\lambda_4u_1) + 480\lambda_4x_3x_4 \\ &-240\lambda_3x_3^2 + 480\lambda - 4x_3^2 + 240\lambda_4x_4^2 \end{aligned} \qquad (٥٥)$$

است و برای سادگی به‌جای $M(x_2, x_3, x_4, \lambda_3, \lambda_4, u_1, u_2)$ از $M(.)$ استفاده شده است. همچنین توابع سوییچ به‌صورت:

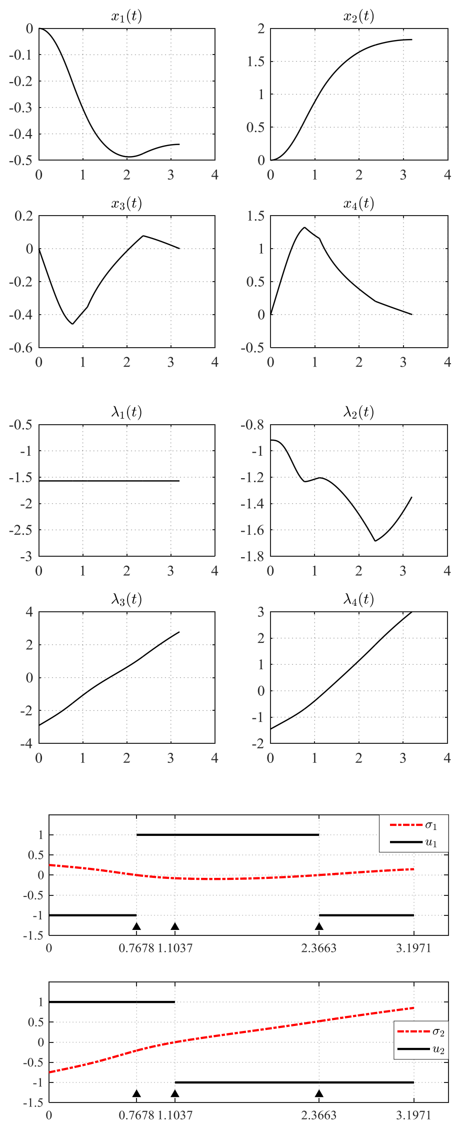
$$\sigma_1(t) = \frac{(20/3)(\lambda_3 - \lambda_4) - 10\lambda_4\cos(x_2)}{(400/9) - 25\cos^2(x_2)} \qquad (٥٦)$$

$$\sigma_2(t) = \frac{(50/3)\lambda_4 + 10\lambda_4\cos(x_2) - (10/3)\lambda_3 - 5\lambda_3\cos(x_2)}{(400/9) - 25\cos^2(x_2)} \qquad (٥٧)$$

خواهند بود.

حال با معلوم بودن تعداد نقاط سوییچ و ساختار کنترل بهینه، این مسئله را با روش پیشنهادی حل می‌کنیم. در شکل (۳)، توابع کنترل، سوییچ، حالت و الحاقی به‌دست‌آمده نشان داده شده است و در جدول (۵)، مقادیر زمان‌های نهایی و سوییچ گزارش شده‌اند. علاوه براین، برای نشان دادن دقّت و همگرایی روش، مقادیر اولیهٔ متغیرهای الحاقی در جدول (٦)، گزارش شده‌اند. توجّه شود که روش بیان‌شده، راه‌حلی دقیق

ارائه می‌دهد و می‌تواند نقاط سوییچ را با دقّت بسیار مناسب به دست آورد.



شکل «۳»: توابع سوییچ، کنترل، حالت و الحاقی به‌دست‌آمده از روش پیشنهادی در مثال ۳

مثال ٤: جرثقیل پل. مسئله زمان انتهایی آزاد جرثقیل پل که در [9] آمده است را در نظر بگیرید. در این مسئله فرض بر این است که جرثقیل روی ریل‌های مستقیم و بدون اصطکاک قرار داشته و بار آن در طناب‌هایی دایمی و غیرقابل‌تحمل از مرکز ثقل خود معلق باشد. در این سیستم، هدف حرکت جرثقیل از یک موقعیت به موقعیت دیگر در حداقل زمان ممکن است به‌نحوی‌که بار آن در موقعیتی ثابت از جایی شروع و به پایان برسد. طبیعتاً تابع کنترل در این مسئله همان نیروی کنترل جرثقیل یعنی پدال گاز یا احیاناً ترمز جرثقیل است. لذا در این مسئله، هدف مینیمم کردن زمان انتهایی t_f نسبت به محدودیّت‌های

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{٥٨}$$

$$\dot{x}_2 = u \tag{٥٩}$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \tag{٦٠}$$

$$\dot{x}_4 = -0.98 x_3 + 0.1u \tag{٦١}$$

$$u(t) \in \{-1, 1\} \tag{٦٢}$$

و شرایط اولّیه و مرزی

$$\mathrm{x}(0) = [0,0,0,0]^T \tag{٦٣}$$

$$\mathrm{x}(t_f) = [15,0,0,0]^T \tag{٦٤}$$

می‌باشند. در اینجا تابع همیلتونی (٦) به‌صورت:

$$H(\mathrm{x},\lambda,u) = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u + \lambda_3 x_4 - \lambda_4 (0.98 x_3 - 0.1u) \tag{٦٥}$$

خواهد بود که منجر به تشکیل معادلات الحاقی (٩) به‌صورت:

$$d\lambda_1 / dt = 0 \tag{٦٦}$$

$$d\lambda_2 / dt = -\lambda_1 \tag{٦٧}$$

$$d\lambda_3 / dt = 0.98 \lambda_4 \tag{٦٨}$$

$$d\lambda_4 / dt = -\lambda_3 \tag{٦٩}$$

خواهد گشت. در این مسئله تابع سوییچ $\sigma(t) = \lambda_2(t) + 0.1\lambda_4(t)$، کنترل بهینه را به‌صورت $u(t) = -\mathrm{sign}(\lambda_2(t) + 0.1\lambda_4(t))$ مشخص می‌نماید.

جدول «۵»: (مسئلهٔ بازوهای یک روبات): مقادیر زمان‌های نهایی و سوییچ محاسبه‌شده برای مقادیر مختلف پارامترهای fsolve و ode45

TolFun	TolX	RelTol	AbsTol	s_1	s_2	s_3	t_f
1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	0.76778603056	1.10366985024	2.36634282018	3.19710629592
1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	0.76778926545	1.10367124281	2.36634527742	3.19711194006
1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	0.76778927125	1.10367129913	2.36634521474	3.19711188693
1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	0.76778927118	1.10367129908	2.36634521457	3.19711188678
نتایج به‌دست‌آمده از [6]				0.7677893	1.1036713	2.3663452	3.197119

جدول «۶»: (مسئلهٔ بازوهای یک روبات): مقادیر محاسبه‌شده مقادیر اولّیه متغیرهای الحاقی به ازای مقادیر مختلف پارامترهای fsolve و ode45

TolFun	TolX	RelTol	AbsTol	$\lambda_1(0)$	$\lambda_2(0)$	$\lambda_3(0)$	$\lambda_4(0)$
1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	-1.56900143800	-0.91771498374	-2.90427738607	-1.45400686594
1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	-1.56971944709	-0.91794327412	-2.90687926979	-1.45494529907
1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	-1.56971965077	-0.91794340778	-2.90687990183	-1.45494560686
1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	-1.56971965087	-0.91794340811	-2.90687990192	-1.45494560707
نتایج به‌دست‌آمده از [6]				-1.5697236	-0.9179555	-2.9053665	-1.4543976

اکنون با مشخص بودن تعداد نقاط سوییچ و ساختار کنترل بهینه که از روش پرتابی مرسوم حاصل آمده است، این مسئله را با روش پیشنهادی حل می‌کنیم. در شکل (٤) توابع کنترل، سوییچ، حالت و الحاقی به‌دست‌آمده نشان داده شده است و در جدول (۷) مقادیر زمان‌های نهایی و سوییچ گزارش شده‌اند. همچنین برای نمایش دقّت و همگرایی روش، مقادیر اولّیه متغیرهای الحاقی نیز در جدول (۸) گزارش شده است.

مثال ۵: رآکتور شیمیایی. مسئلهٔ زمان انتهایی آزاد رآکتور شیمیایی که در [21] آمده است را در نظر بگیرید. در این مسئله، متغیرهای حالت x_1، x_2 و x_3 به ترتیب چگالی، تأخیر در غلظت و واکنش‌پذیری را در یک سیستم نشان می‌دهند، درحالی‌که متغیر u که همان متغیر کنترلی در این سیستم است، بیانگر دما در لحظه t است. در این سیستم، مسئله مینیمم کردن زمان انتهایی t_f نسبت به محدودیّت‌های

$$\dot{x}_1 = 5x_1(x_3-1)+0.1x_2 \tag{۷۰}$$

$$\dot{x}_2 = 5x_1-0.1x_2 \tag{۷۱}$$

$$\dot{x}_3 = 0.2u \tag{۷۲}$$

$$u(t)\in\{-1,1\} \tag{۷۳}$$

و شرایط اولّیه و مرزی

$$\mathrm{x}(0)=[0.04,2,0]^T \tag{۷٤}$$

$$\mathrm{x}(t_f)=[0.06,3,0]^T \tag{۷۵}$$

می‌باشند. در اینجا تابع همیلتونی (٦) به‌صورت:

$$H(\mathrm{x},\lambda,u)=1+5\lambda_1x_1(x_3-1)+0.1\lambda_1x_2 \\ +5\lambda_2x_1-0.1\lambda_2x_2+0.2\lambda_3u \tag{۷٦}$$

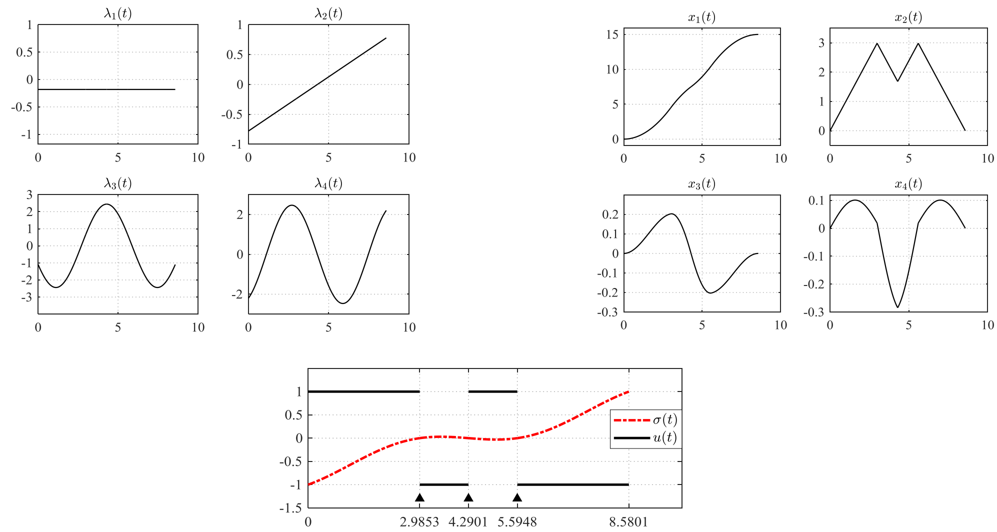
خواهد بود که منجر به تشکیل معادلات الحاقی (۹) به‌صورت:

$$d\lambda_1/dt = 5\lambda_1(1-x_3)-5\lambda_2 \tag{۷۷}$$

$$d\lambda_2/dt = 0.1\lambda_2-0.1\lambda_1 \tag{۷۸}$$

$$d\lambda_3/dt = -5\lambda_1x_1 \tag{۷۹}$$

خواهد گشت. در این مسئله تابع سوییچ $\sigma(t)=0.2\lambda_3(t)$، کنترل بهینه را به‌صورت $u(t)=-\mathrm{sign}(0.2\lambda_3(t))$ مشخص می‌نماید.



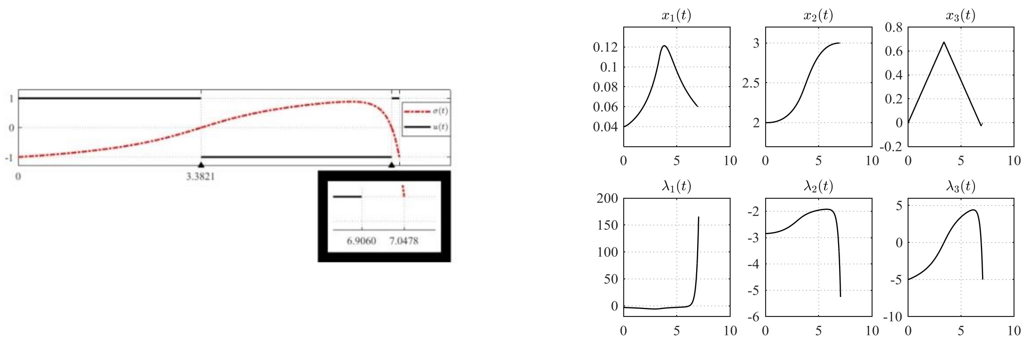
شکل «٤»: توابع سوییچ، کنترل، حالت و الحاقی به‌دست‌آمده از روش پیشنهادی در مثال ٤

جدول «٧»: (مسئلهٔ جرثقیل پل): مقادیر زمان‌های نهایی و سوییچ محاسبه‌شده برای مقادیر مختلف پارامترهای fsolve و ode45

TolFun	TolX	RelTol	AbsTol	s_1	s_2	s_3	t_f
1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	2.98534164389	4.29005305228	5.59476254024	8.58010226372
1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	2.98534070890	4.29005156830	5.59476216189	8.58010260154
1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	2.98534056243	4.29005131910	5.59476207521	8.58010263708
1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	2.98534056214	4.29005131855	5.59476207495	8.58010263709
نتایج به‌دست‌آمده از[9]				2.98534056214	4.290051311855	5.59476207495	8.58010263709

جدول «٨»: (مسئلهٔ جرثقیل پل): مقادیر محاسبه‌شده مقادیر اوّلیّه متغیرهای الحاقی به ازای مقادیر مختلف پارامترهای fsolve و ode45

TolFun	TolX	RelTol	AbsTol	$\lambda_1(0)$	$\lambda_2(0)$	$\lambda_3(0)$	$\lambda_4(0)$
1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	-0.18172142222	-0.77959432782	-1.09588674992	-2.20406817424
1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	-0.18172131824	-0.77959374522	-1.09588850188	-2.20406239144
1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	-0.18172135778	-0.77959395064	-1.09588779157	-2.20406049756
1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	-0.18172135774	-0.77959395040	-1.09588779215	-2.20406049599



شکل «٥»: توابع سوییچ، کنترل، حالت و الحاقی به‌دست‌آمده از روش پیشنهادی در مثال ٥

جدول «۹»: (مسئلهٔ رآکتور شیمیایی): مقادیر زمان‌های نهایی و سوییچ محاسبه‌شده برای مقادیر مختلف پارامترهای fsolve و ode45

TolFun	TolX	RelTol	AbsTol	s_1	s_2	t_f
1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	3.38209879138	6.90661504664	7.04903251040
1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	3.38208953564	6.90599293791	7.04780686215
1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	3.38208954823	6.90599297159	7.04780684672
1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	3.38208954822	6.90599297157	7.04780684669
نتایج به‌دست‌آمده از[21]				3.38208957	6.90599299	7.04780685

جدول «۱۰»: (مسئلهٔ رآکتور شیمیایی): مقادیر محاسبه‌شده مقادیر اوّلیّه متغیرهای الحاقی به ازای مقادیر مختلف پارامترهای fsolve و ode45

TolFun	TolX	RelTol	AbsTol	$\lambda_1(0)$	$\lambda_2(0)$	$\lambda_3(0)$
1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	- 2.95496305447	- 2.83091449952	- 4.97444752966
1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	- 2.97015514326	- 2.84546902458	- 4.99999998975
1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	- 2.97015518504	- 2.84546909658	- 4.99999999921
1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	- 2.97015518582	- 2.84546909698	- 5.00000000000
نتایج به‌دست‌آمده از[21]				- 2.97015515	- 2.84546900	-5

اکنون با مشخص بودن تعداد نقاط سوییچ و ساختار کنترل بهینه که از روش پرتابی مرسوم حاصل آمده است، این مسئله را با روش پیشنهادی حل می‌کنیم. در شکل (۵) توابع کنترل، سوییچ، حالت و الحاقی به‌دست‌آمده نشان داده شده است و در جدول (۹) مقادیر زمان‌های نهایی و سوییچ گزارش شده‌اند. همچنین برای نمایش دقّت و همگرایی روش، مقادیر اوّلیّه متغیرهای الحاقی نیز در جدول (۱۰) گزارش شده است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله از یک روش پرتابی با کنترل پارامتری شده برای حل غیرمستقیم دسته‌ای از مسائل کنترل بهینهٔ سوییچ‌دار استفاده شد و نتایج کار روی پنج مسئله نوسانگر واندرپل، سیستم غیرخطی مرتبه سوم، بازوهای یک روبات، جرثقیل پل و رآکتور شیمیایی که همگی جزو مسائل معیارسنج در نظریه کنترل بهینه محسوب می‌گردند مشاهده گردید. در مقایسه با روش‌های موجود برای حل این دسته از مسائل کنترل بهینه می‌توان گفت که روش پیشنهادی کارایی مناسبی داشته، به‌خوبی می‌تواند نقاط سوییچ مسئله را با دقّت بالا به دست آورد و همچنین پیاده‌سازی کامپیوتری ساده‌ای دارد. همچنین برآورده کردن شرایط لازم بهینگی از دیگر نقاط قوت این روش محسوب می‌گردد. ولی در عوض، همانند همه روش‌های غیرمستقیم، این روش نیز گستره همگرایی پایینی دارد و به انتخاب حدس اوّلیّه بسیار حساس است. همچنین روش نیازمند مقادیر اوّلیّه مناسب برای متغیرهای الحاقی است که با توجّه به عدم تعبیر فیزیکی از این متغیرها، خود عاملی تأثیرگذار بر همگرایی روش خواهد بود.

واژه‌نامه

کنترل بهینه سوییچ دار	Switching optimal control problem
متغیر مکانی	State variable
متغیر کنترلی	Control variable
سیستم دینامیکی	Dynamical system
تابع هدف	Objective function
اصل مینیمم پونتریاگین	Pontryagin’s minimum principle
تابع همیلتونی	Hamiltonian function

Costate variables	متغیر الحاقی
Hamiltonian boundary value problem (HBVP)	مسأله مقدار مرزی همیلتونی
Improved shooting method	روش پرتابی بهبودیافته
Shooting equation	معادله‌ی پرتابی
Switching function	تابع سوییچ
Transversality condition	شرط ترانسورسالیتی
Initial Value Problem (IVP)	مسأله مقدار اولیه
Runge-Kutta formula	فرمول رانگ کوتا
Relative error	خطای نسبی
Absolute error	خطای مطلق
Van der Pol oscillator	نوسانگر واندرپول
Third-order nonlinear system	سیستم غیرخطی مرتبه سوم
Two-link robot	بازوهای یک ربات
Bridge-Crane Problem	مسأله جرثقیل پل
Nuclear Reactor	مسأله رآکتور شیمیایی

مراجع

1. Ledzewicz, U. and Schttler, H., "Analysis of a cell-cycle specific model for cancer chemotherapy", *Journal of Biological Systems*, Vol. 10, pp. 183–206, (2002).
2. Woon, S. Rehbock, V. and Loxton, R. "Towards global solutions of optimal discrete-valued control problems", *Optimal Control Applications and Methods*, 33, pp. 576–594, (2012).
3. Xia, L. and Shihada, B. "Power and delay optimisation in multi-hop wireless networks", *International Journal of Control*, 87, pp. 1252–1265, (2014).
4. Kaya, C. and Noakes, J. "Computations and time-optimal controls", *Optimal Control Applications and Methods*, 17, pp. 171–185, (1996).
5. Kaya, C. and Noakes, J. "Computational method for time-op timal switching control", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 117, pp. 69–92, (2003)
6. Maurer, H. Buskens, C.Kim, J.-H and Kaya, C. "Optimization methods for the verification of second order sufficient conditions for bang-bang controls", *Optimal Control Applications and Methods*, 26, pp. 129–156, (2005).
7. Lin, Q. Loxton, R. Teo, K. and Wu, Y. "A new computational method for a class of free terminal time optimal control problems", *Pacific Journal of Optimization*, 7, pp. 63–81, (2011).
8. Lin, Q. Loxton, R. Teo, K. and Wu, Y "Optimal control computation for nonlinear systems with state-dependent stopping criteria", *Automatica*, 48, pp. 2116–2129, (2012).
9. Shamsi, M. "A modified pseudospectral scheme for accurate solution of bang-bang optimal control problems", *Optimal Control Applications and Methods*, 32, pp. 668–680, (2011).
10. Gerdts, M. "A nonsmooth newton’s method for control-state constrained optimal control problems", *Mathematics and Computers in Simulation*, 79, pp. 925–936, (2008).
11. Riedinger, P. and Morarescu, I.-C., "A numerical framework for optimal control of switched input affine nonlinear systems subject to path constraint", *Mathematics and Computers in Simulation*, 95, pp. 63–77, (2014).
12. Yu, C. Li, B. Loxton, R. and Teo, K. "Optimal discrete-valued control computation", *Journal of Global Optimization*, 56, pp. 503–518, (2013).

13. Lee, H. Teo, K. Rehbock, V. and Jennings, L., "Control parametrization enhancing technique for optimal discrete-valued control problems", *Automatica*, 35, pp. 1401–1407, (1999).
14. Li, R. Feng, Z. Teo, K. and Duan, G., "Tracking control of linear switched systems", *ANZIAM Journal*, 49, pp. 187–203, (2008).
15. Loxton, R. Teo, K. Rehbock, V. and Yiu, K., "Optimal control problems with a continuous inequality constraint on the state and the control", *Automatica*, 45, pp. 2250–2257, (2009).
16. Wong, K. and Tang, W., "Optimal control of switched impulsive systems with time delay", *ANZIAM Journal*, 53, 292–307, (2012).
17. Kirk, D., "*Optimal Control Theory*", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1970).
18. Bryson Jr., A.E. and Ho, Y.C., "*Applied optimal control: Optimization, estimation, and control*", Hemisphere Publishing Corp. Washington, D. C., (1975).
19. Betts, J., "Survey of numerical methods for trajectory optimization", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 21, pp. 193–207, (1998).
20. Betts, J. T. "*Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming*", 2nd edition, Cambridge University Press, New York, NY, USA, (2009).
21. Maurer, H. and Osmolovskii, N., "Second order sufficient conditions for time-optimal bang-bang control", *SIAM Journal on Control and Optimization*, 42, pp. 2239–2263, (2004).
22. Oberle. H. and Grimm, W., "BNDSCO -A program for the numerical solution of optimal control problems", Technical Report 515-89/22, Institute for Flight Systems Dynamics, DLR, Oberpfaffenhofen, Germany, (1989).
23. Chernousko, F., Akulenko, L. and Bolotnik, N., "Time-optimal control for robotic manipulators", *Optimal Control Applications and Methods*, 10, pp. 293–311, (1989).
24. Geering, H., Guzzella, L., Hepner, S. and Onder, C., "Time-optimal motions of robots in assembly tasks", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31, pp. 512–518, (1986).
25. Mezzadri, F and Galligani, E., "A chebyshev technique for the solution of optimal control problems with nonlinear programming methods", *Mathematics and Computers in Simulation*, 121, pp. 95–108, (2016).
26. Teo, K., Goh, C.J. and Wong, K.H., "A Unified Computational Approach to Optimal Control Problems", Longman Scientific and Technical, (1991).
27. Woon, S., Rehbock, V. and Loxton, R., "Global optimization method for continuous-time sensor scheduling", *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 10, pp. 175–188, (2010).